RELACIONES Y FUNCIONES

October 14, 2010

Así como otros conceptos, el concepto de función ha sufrido una larga historia durante la cual ha evolucionado, de ser una simple idea intuitiva, a la actual pureza con que hoy la conocemos.

Esta historia ha estado ligada, no sólo a la historia de la matemática, sino también de las ciencias en general, particularmente de la física, y hoy, por su utilidad, su importancia trasciende el ámbito de la Matemática para abarcar el de otras ciencias.

En comparación con otros conceptos, como los de numero y forma, podemos decir que este es un concepto moderno en la matemática pues su historia no va más allá del siglo XVI.

No obstante, rápidamente este concepto ha cobrado tanta importancia que hoy en día es raro encontrar alguna de la Matemática donde no aparezca.

En lo que sigue veremos que la teoría de conjuntos nos ofrece un lenguaje adecuado para discutir el concepto de función.

RELACIONES.

Frecuentemente nos encontramos con parejas de conjuntos cuyos elementos están relaciondos de una u otra forma; veamos algunos ejemplos:

1) Cada casa de una ciudad tiene generalmente asociado un número, y así, tenemos entonces una relación entre el conjunto de casas de la ciudad y el conjunto de los números;

2) Podemos pensar también, que entre el conjunto de todas las personas y el conjunto de todas las casas, existe una relación que relaciona, de manera natural, a cada persona con la casa en que vive;

3) Se puede tener una relación que relaciona a un conjunto consigo mismo, por ejemplo: si a cada persona la relacionamos con sus parientes tendremos una relación entre el conjunto de las personas y el conjunto de las personas;

4) Si llamamos N al conjunto de los números naturales y V al conjunto de las vocales, una manera de relacionar estos conjuntos es asociar la a con el 1, la e con el 2, la i con el 3, la o con el 4 y la u con el 5.

En escencia pues, tener una relación es tener dos conjuntos y una manera de asociar o relacionar elementos de un conjunto, con elementos del otro conjunto.

Una vez dados dos conjuntos, para especificación una relación entre ellos solo hay que decir que elementos están relacionados.

Ejemplo, si le llamamos R a la relación del ejemplo 4, podemos pensar que

R consta del conjunto de parejas siguiente:

$$R = \{(1, a), (2, e), (3, i), (4, o), (5, m)\}$$

Observese que R definida así es un subconjunto de el producto cartesiano de N con V.

Generalizando este procedimiento definimos ahora una relación de la siguiente manera:

Definición. Decimos que R es una relación de el conjunto X a el conjunto Y si y sólo si $R\ c\ X\ x\ Y$. Al conjunto X le llamamos dominio de la relación y a Y contradominio de la relación y se denotan por D_R y C_R respectivamente.

Ejemplos:

1) Si $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$G = \{(a, 1), (a, 2), (c, 1), (c, 5)\}$ es un subconjunto de $X\ x\ Y$ y por lo tanto una relación con dominio X y contradictorio Y. (imagen)

2) Si tomamos a R, el conjunto de todos los números reales, como dominio y también como contradominio de la relación, entonces

$$C = \{(x, y) \in RxR\}|x^2 + y^2 = 1\}$$

siendo un subconjunto de RxR es una relación de R a R. (imagen)

3) Así como en el ejemplo anterior, cualquier curva o cualquier otro subconjunto de el plano nos da una relación de R x R, en tanto que subconjunto de sí mismo, es una relación de R en R: la que relaciona a cada número real con todos los números reales.

Observemos ahora que si $R\ c\ X\ x\ Y$ y si Z y W son conjuntos tales que $X\ c\ Z$ y $Y\ c\ W$ entonces $R\ c\ Z\ x\ W$. Así, si estabamos pensando a R como una relación de X a Y,también podemos pensarla como una relación de Z a W. Para no perder de vista quienes estamos considerando como dominio y como contradominio de una relación decimos la siguiente definición:

Definición. Dos relaciones R y R son iguales si son iguales como conjuntos y además tienen el mismo dominio y el mismo contradominio.

Ejemplo: Si llamamos H a la relación de $Z = \{a, b, c\}$ a $W = \{1, 2, 5\}$ tal que $H = \{(a, 1), (a, 2), (c, 5), (c, 1)\}$ entonces esta relación y la relación G definida en el ejemplo 1 son distintas porque sus contradominios no son iguales.

De acuerdo a la manera en que hemos definido relación, el dominio y el contradominio juegan papeles distintos: en general una relación de X y Y en distinta de una relación de Y a X.

Si R es una relación de X a Y y, a partir de R construimos un conjunto de parejas intercambiando en cada pareja que pertenezca a R el primer elemento de la pareja con el segundo, entonces este nuevo conjunto será un subconjunto de $Y\ x\ X$. Esta relación que se obtiene de Y a X es llamada relación inversa de R.

Definición. Dada R, relación de X a Y, le llamamos R inversa y demostramos por R^{-1} a la realción de Y a X que cumple:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in YxX|(x, y) \in R\}$$

FUNCIONES.

Cierto tipo de relaciones guardan un interés especial, entre otras cosas por su utilidad para describir algunos fenómenos naturales. Consideremos por ejemplo un cuerpo que se mueve en linea recta de un punto A a un punto B y supongamos que la distancia de A a B en 2km, y que el movimiento tiene una duración de una hora.(imagen)

Cada posición en el segmento que va de A a B la podemos representar por un número entre cero y dos; así en el tiempo $t = 0$ el cuerpo está en la posición $x = 0$, en el tiempo $t = 1$ hora estará en $x = 2$ y en cualquier tiempo intermedio en cuerpo estará en alguna posición x entre 0 y 2.

Aún cuando hemos especificado la distancia de A a B y el tiempo total de recorrido, este movimiento puede llevarse a cabo de muchas maneras distintas dependiendo de que el cuerpo viaje directo hacia B o que durante su mivimiento regrese un poco el camino andado y luego prosiga, así como de la velocidad con que viaje durante su movimiento; en cualquier caso el tipo de movimiento que realice determina una relación entre el conjunto de los tiempos y el conjunto de posiciones: la que a cada tiempo se asocia la posición en que estaba el cuerpo en ese tiempo.

Si definimos

$$T = \{t \in R | o \leq t \leq 1\}$$

y

$$D = \{x \in R | 0 \leq x \leq 2\}$$

entonces cada posible movimiento M determinará un subconjunto de $T\ x\ D$. imagen

En las figuras se muestran dos posibles movimientos; en la gráfica (b) el cuerpo avanza hasta la posición x después regresa hasta x_2 y hace viaje directo hasta B.

Sin importar que movimiento el cuerpo realize la relación correspondiente tendrá la siguiente carcaterística: cada $t \in T$ tiene un único $x \in D$ que está relacionado con él. Esto se debe a que el cuerpo en cada tiempo tiene que estar en alguna posición y no puede estar en dos posiciones simultaneamente.

Los movimientos no son los únicos fenomenos que dan lugar a relaciones con estas caracteristicas: un problema típico en casi todas las ciencias consiste en estudiar la evolución en el tiempo de algun sistema un sociologo, por ejemplo, podría estar interesado en estudiar el comportamiento de una sociedad y para un astrónomo el sistema de interés podría ser el sistema solar. En cualquier caso ocurre que, en cada tiempo (imagen) t, el sistema en estudio, que simbolizaremos por la letra S, se encuentra en un cierto estado y que en un mismo tiempo no puede encontrarse en dos estados distintos.

A las relaciones que guardan estas caracteristicas las clasificamos con el nombre de funciónes.

Definición: Si X y Y son los conjuntos, decimos que f es una función de X a Y si y sólo si f es una relación de X a Y que tiene las siguientes propiedades:

i) $\forall x \in X$ existe y $\in Y$ tal que $(x, y) \in f$

ii) Si $y \neq z$ y $(x, y) \in f$ entonces $(x, z) \in f$

Como en todas la relaciones, a X le llamamos el dominio de f y a Y el contradominio. Para referirnos es común usar letras como f, g, h, ó F, G, y H aunque, ocasionalmente se recurre al uso de cualquier otra letra, mayúscula o minúscula, del alfabeto castellano o griego.

Observese que hay muchas relaciones que no son funciones, particularmente las de los ejemplos 1 y 2 que dimos anteriormente en la sección de relaciones.

Ejemplos: Sean $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$

1) $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$ imagen

2) $g = \{(a, 1), (b, 1), (c, 4)\}$ imagen

3) $H = \{(a, 3), (b, 3), (c, 3)\}$ imagen

Notación: Para indicar que f es una función con dominio el conjunto X y contradominio el conjunto Y escribimos $f : X \to Y$. Para decir que $(x, y) \in f$ escribimos $f(x) = y$ que se lee "f de x es igual a y" y quiere decir que y es el asociado de x bajo la función f. Así para el ejemplo 2 de arriba, $g : X \to Y$ y $g(a) = 1$, $g(b) = 1$ y $g(c) = 4$.

El concepto de igualdad entre funciones es el mismo que para relaciones.

Definición. Se dice que dos funciones f y g son iguales si y sólo si f y g son iguales como conjuntos y $C_f = C_g$.

¿Por qué no es necesario pedir en la definición que $D_f = D_g$?.

En los ejemplos dados puede observarse que, para que f sea una función de X a Y, no es necesario que todos los elementos de Y sean asociados de algún elemento de X. A el subconjunto de Y tal que todos sean elementos estan asociados a algún elemento de X se le llama imagen y se denota por i en f.

Definición. Si $f : X \to Y$

$\text{Im} f = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ tq. f(x) = y\}$

Cuando todos los elementos del contradominio son asociados de algún elemento del dominio se dice que la función es sobre o suprayectiva.

Definición. f es una función suprayectiva si y sólo si i en $f = C_f$.

Observese que ninguna de las funciones en los ejemplos 1,2 y 3 es suprayectiva.

A las funciones les hemos pedido que todo elemento del dominio tenga un único asociado en el contradominio, pero no se requiere que los elementos del contradominio sean asociados de un único elemento del dominio*. A las funciones en las que, si un elemento del contradominio es asociado de un elemento del dominio entonces no es asociado de ningún otro, se les llama funciones como a uno o inyectivas.

*Si pensamos que una función representa la evolución de un sistema, es posible que un mismo estado del sistema se repita en dos tiempos distintos, esto ocurre, por ejemplo, cuando el sistema tiene un comportamiento períodico.

Definición. $f : X \to Y$ es inyectiva si y sólo si $\forall x_1, x_2 \in X : x, \neq x_2 \Longrightarrow f(x_{1)} \neq f(x_2)$

o equivalentemente

$\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

Notese que de las funciones en los ejemplos 1,2 y 3 sólo la primera es inyectiva.

Debe tenerse cuidado con el nombre de "uno a uno" pues no corresponde apropiadamente a la propiedad que se presenta: en todas las funciones cada punto del dominio va a dar a sólo un punto del contradominio. Quizas un nombre más propio es "uno de uno", indicando así con más exactitud lo que queremos: que cada punto de la imagen viene de un sólo punto del dominio.

Definición. $f : X \to Y$ es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplos:

1) Si $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ se puede dar $f : X \to Y$ inyectiva, por ejemplo, $f = \{(a, 4), (b, 1), (c, 2)$. (imagen)

Sin embargo no es posible dar $f : X \to Y$ que sea suprayectiva. ¡Intente dar un ejemplo!

2) Si $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1, 2\}$ puede darse $f : X \to Y$ que sea suprayectiva, por ejemplo, $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ pero no puede darse $f : X \to Y$ que sea inyectiva. ¡Intente construir una!.

En general, se puede demostrar facilmente, que si X y Y son conjuntos finitos, existe una función de X a Y inyectiva si y sólo si $\#X \leq \#Y$ y existe una suprayectiva si y sólo si $\#X \geq \#Y$. En consecuencia existe una biyección entre X y Y si y sólo si $\#X = \#Y$.

Anteriormente vimos, que cuando tenemos una relación entre dos conjuntos siempre podemos construir su relación inversa, notemos ahora que la relación inversa de una función no será siempre una función. Por ejemplo, si la función no es suprayectiva, la relación inversa deja puntos de su dominio sin asociarlos y, si la función no es inyectiva, la relación inversa asocia a algún punto de su dominio con más de un punto en su contradominio. (Verifíquese esto con algún ejemplo sencillo). Por otra parte, si la función es biyectiva, se tiene que su relación inversa es una función, pues, en este caso, todo punto del contradominio es asociado de un único punto del dominio.

Entonces tenemos el siguiente resultado:

La relación inversa de una función es función si y sólo si la función es biyectiva.

Cuando una función f tiene función inversa se dice que es irrevertible y a su función inversa se la denota por f^{-1}.

Supongamos que tenemos tres conjuntos: X, Y y Z y dos funciones: $g : X \to Y$ y $f : Y \to Z$. (imagen) Entonces todo punto de X tiene un asociado en Y que a su vez tiene un asociado en Z. Esto significa que a partir de estas funciones existe una manera de asociar a cada elemento de X un único elemento de Z. A esta función de X a Z se le llama "f compuesta con g" y se la denota por f o g.

Ejemplo: Si $X = \{a, b, c\}, Y = \{1, 2, 3, 4\}, Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}, g = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4)\}$ y $f = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \gamma), (4, \gamma)\}$ entonces f o $g : X \to Z$ y f o $g = \{(a, \beta), (b, \gamma), (c, \gamma)\}$. (imagen)

Observemos ahora que para que pueda definirse la función f o $g : X \to Z$ no es necesario que $C_g = D_f$ sino que basta que I en $g \subset D_f$.

Ejemplo: Sean $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $W = \{2, 3, 4, 5\}$, $Z = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $g = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$, $f = \{(2, \alpha), (3, \alpha), (4, \gamma), (5, \gamma)\}$

en este caso tenemos que f o $g : X \to Z$ es tal que f o $g = \{(a, \alpha), (b, \alpha), (c, \beta)\}$. (imagen)

Existe un caso más general en el que se puede hacer la compocición de funciones: aquel en que I en $g \cap D_f \neq \varnothing$.

Esta situación se muestra en la figura siguiente: (imagen)

Como queremos definir f o g de tal manera que $[f \text{ o } g](x) = f(g(x))$ entonces f o g no puede tener como dominio a todo X : existen puntos en X (por ejemplo el x^1 del dibujo) que su asociado bajo g no está en D_f. Así pues, para que f o g sea efectivamente una función, debemos considerar como D_f o g sólo aquella parte de X que consta de puntos tales que, bajo la acción de g, caen en el dominio de f.

Definición. Si $g : X \to Y$, $f : W \to Z$, I en $g \cap D_f \neq \varnothing$ y $\mho = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$ entonces, denotamos por f o g y le llamamos "f compuesta con g", a la función con dominio en $\mho$ y contradominio en Z tal que $[f \circ g](x) = f(g(x))$ $\forall x \in \mho$ (imagen).

En la figura suponemos que la zona punteada es la imagen de g y que la parte rayada de X va a la parte rayada de Y.